

Problema del mes

desembre-gener

(per lliurar al professorat de matemàtiques abans del dia 10 de febrer)

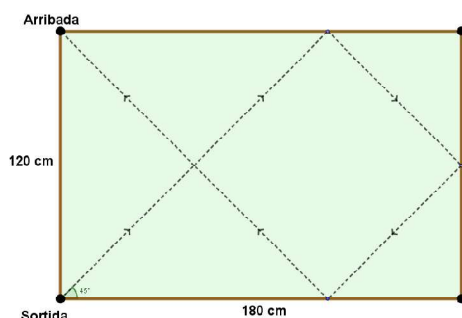
Argumenteu bé la solució amb els càlculs i explicacions necessaris.

Problema categoria 1^r. i 2ⁿ. d'ESO

Un problema del Fem mates, cada nivell en la seva categoria. Es pot presentar el problema en grups de 4.

EL BILLAR

El pare d'en Jordi té, a casa seva, un billar de quatre forats de 180 cm per 120 cm. Per aquest motiu els tres amics d'en Jordi sovint s'hi apleguen a jugar. Fa dos dies que en Jordi va descobrir que si llançava la bola des de la cantonada inferior esquerra amb un angle de 45° , aquesta anava a parar sempre a la cantonada superior esquerra.



En Jordi ha formulat tota una teoria al voltant d'aquest billar i creu poder endevinar on anirà la bola si la llança amb un angle de 45° des de qualsevol dels altres forats.

a) On creus que anirà la bola si és llançada des dels altres forats que hi ha? Per què ho creus?

Vistos els resultats, en Jordi i els seus tres amics decideixen estudiar la situació i buscar diferents situacions amb taulells que puguin dibuixar en un full quadriculat.

Aquest cop llençarà sempre la bola des del mateix forat (Les dimensions dels taulells són sempre nombres naturals).

- b) Què passa en els taulells en què l'amplada sempre és 1 i anem variant la llargada? I si la llargada sempre és 1 i variem l'amplada?
- c) Estudia on acaba la bola en diferents taulells on l'amplada és 2. I si és 3? I 4?
- d) Estudia on acaba la bola en els taulells de dimensions 6x9 i 8x12.
- e) Fes un estudi per determinar on cau la bola depenent de les dimensions del taulell.
- f) Els quatre amics s'han adonat que en alguns casos el dibuix que ha fet la bola els ha sortit el mateix, tot i tenir taulells diferents. Quan passa això? Prova amb diferents resultats i enuncia les relacions que trobes.
- g) Fixa't, ara, quants cops has tocat la banda en cadascun dels casos que has estudiat. En pots treure alguna conjectura?

Problema categoria 3^r. i 4^t. d'ESO

Un problema del +Mates. Es pot presentar el problema en grups de 4.

EL JOC DE CARTES

La Iman està aprenent alguns jocs de màgia. N'ha trobat un que sembla molt senzill. Es prenen 21 cartes i un voluntari n'escull una. Després la torna a barrejar entre les 21 cartes del piló. Llavors el mag pren les cartes i en fa 3 pilons iguals, repartint una carta a cada piló, i li demana al voluntari en quin piló ha vist la seva carta. Al recollir els pilons, ho fa de manera que aquest quedi al mig. Repeteix l'operació tres vegades i, miraculosament, la carta sempre queda al mig, en la 11a posició.

- a) Prova de fer aquest truc. És cert que sempre funciona? Explica raonadament perquè.
- b) Què passaria si enlloc de col·locar al mig el piló escollit es posés sempre al fons?
- c) Quantes vegades cal repetir el procés de repartir en 3 pilons si tenim 3 cartes? I si tenim 6 cartes? I si tenim 9 cartes? I amb 12 cartes?
En quins d'aquest casos la carta queda realment al mig del piló?
- d) Quins altre nombre de cartes, a part del 21, creus que funcionarà? Raona la resposta
- e) I si es fan 2 pilons? Amb quantes cartes podria jugar i com ho faries?

- f) I si en comptes de 3 es fan 5 pilons? Amb quantes cartes puc fer aquest truc?
Quantes vegades hauré de repetir l'operació de posar el piló escollit al mig?
- g) Si es tenen n cartes i es fan m pilons, explica raonadament quines condicions han de complir n i m per tal que funcioni el joc.

Problema categoria Batxillerat

Un problema del +Mates. Es pot presentar el problema en grups de 4.

CAMINS ITERATIUS

Considerem un punt situat a l'eix d'abscisses i marquem un camí seguint els diferents passos:

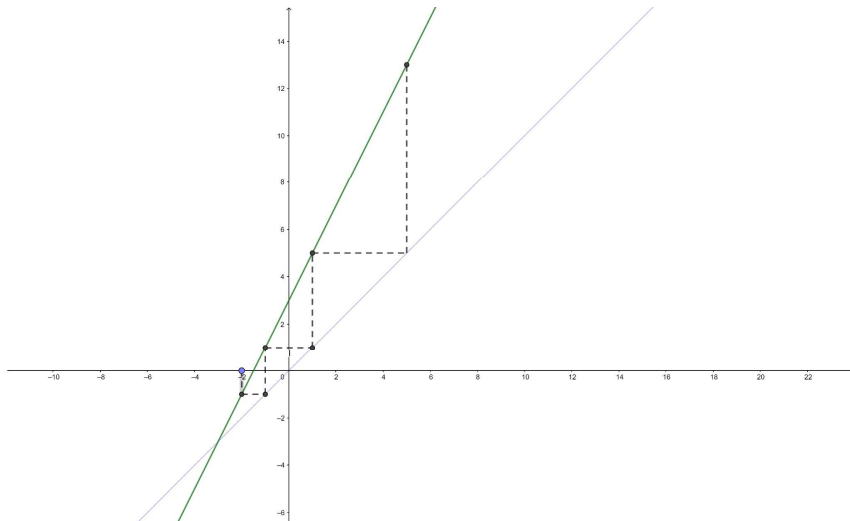
PAS 1: Movem verticalment el punt des de l'eix d'abscisses fins a la corba $y=f(x)$.

PAS 2. Movem el punt horitzontalment des de el punt trobat de la corba fins a la recta $y=x$.

Repetim els passos 1 i 2 successivament i anem trobant i anotant nous punts de la corba.

A continuació estudiarem aquests camins amb les **rectes $f(x)=mx+n$** .

Seguint aquest procés iteratiu ens adonarem que podem trobar diferents camins en forma d'escala. Aquesta **escala** pot ser **atractora i convergir** (*tendeix a apropar-se cap endins a un punt*) o **repulsora i divergir** (*tendeix a allunyar-se cap a fora*).



Si analitzem com es mou el punt inicial al aplicar el procés iteratiu sobre $f(x)=mx+n$ i $y=x$ obtenim els següents punts sobre la corba :

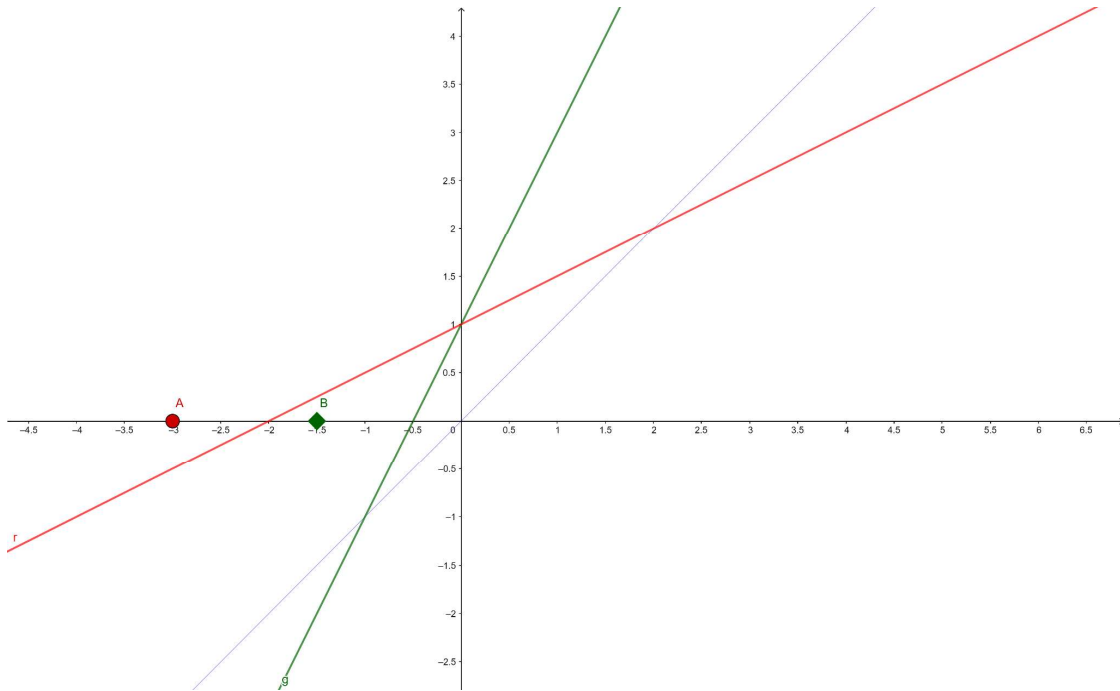
$$P_1(-2,0), P_2(-2, f(-2)), P_3(f(-2), f(f(-2))), P_4(f(f(-2)), f(f(f(-2)))) , \dots$$

Per exemple, si l'equació de la recta és $f(x)=2x+3$

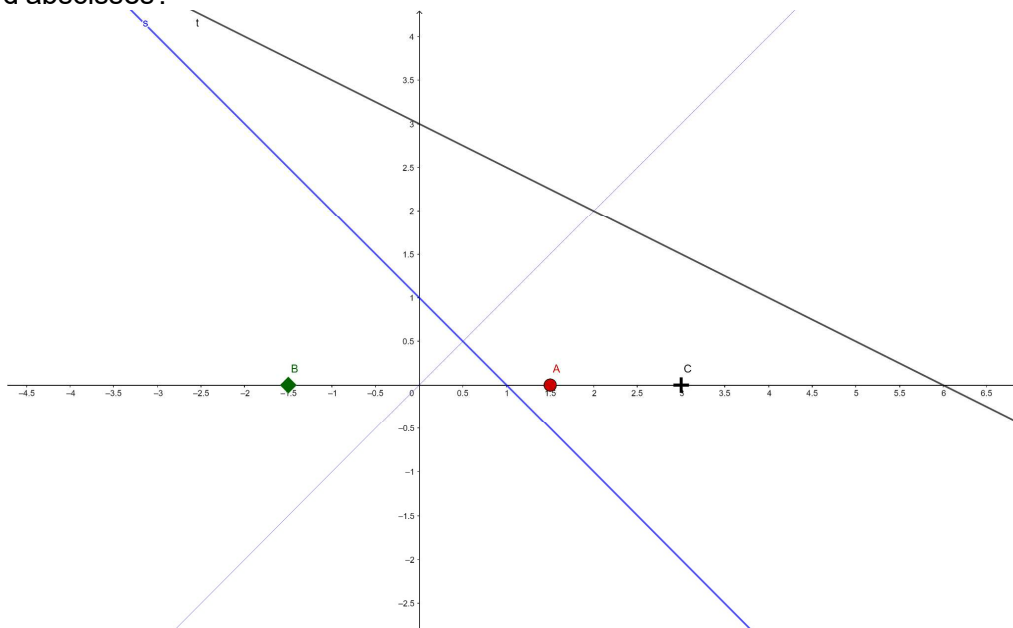
$$P_1(-2,0), P_2(-2,-1), P_3(-1,1), P_4(1,5), \dots$$

Ara que ja hem explicat com aplicar aquests camins, cal que responguis al següents apartats:

1. Segueix la iteració amb la funció $f(x)=2x+3$ i troba la successió de punts $P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}$
2. Amb la mateixa recta comença una nova successió a partir del punt inicial $Q_1 = (-4, 0)$ i calcula'n els 10 primers termes. Cap a on tendeixen?
3. Calcula el punt d'intersecció entre la recta $y=2x+3$ i la diagonal $y=x$. Quin tipus d'escala es formaria? Atractora o repulsora ?
4. Estudia cap on tendeixen els punts A si usem la recta vermella i els punts B si usem la recta verda.
 - a. Què hi observes?
 - b. Segueixen movent-se en forma d'escala?
 - c. Cap on tendeixen?
 - d. Què passa si comencem el procés iteratiu amb altres punts inicials de l'eix d'abscisses?



5. Estudia ara el comportament dels següents punts A,B i C amb la recta blava i la recta negra.
- Què hi observes?
 - Segueixen movent-se en forma d'escala?
 - Cap on tendeixen?
 - Què passa si comencem el procés iteratiu amb altres punts inicials de l'eix d'abscisses?



6. Finalment ens preguntem de què depèn el comportament d'aquest tipus d'iteracions.
Classifica el seu comportament depenent de les característiques de la recta que tinguem.