

# Problema del mes de GENER

(Per lliurar al professorat de matemàtiques abans del dia **8 de Febrer**)

Argumenteu bé la solució amb els càlculs i explicacions necessaris.

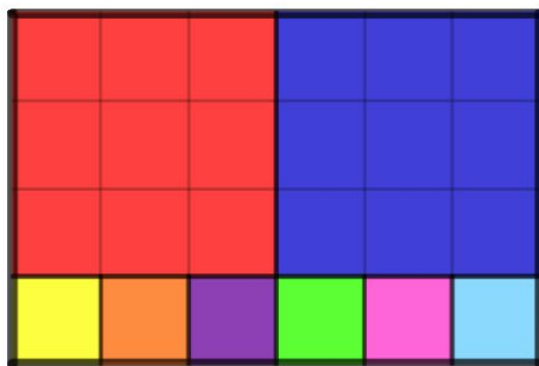
## Problema categoria 1r i 2n d'ESO

Un problema del Fem Mates, cada nivell en la seva categoria. Es pot presentar el problema en grups de 4.

### 1R d'ESO: TRENACLOSQUES DE RECTANGLES I QUADRATS

Anem a fer trencaclosques artístics amb rectangles i quadrats!

Dibuixem un rectangle de  $6 \times 4$  i el descomponem en quadrats de la següent manera:



- Hi ha alguna altra manera de descompondre'l? Dibuixa'n tres més.
- Quina de les diferents possibilitats que heu fet té el mínim nombre de quadrats possibles?
- Hi ha alguna manera d'aconseguir menys quadrats? Feu la vostra conjectura abans de continuar amb la investigació. Per dibuixar els rectangles, agafeu els fulls quadriculats que us tenim preparats. Ara descomponeu un rectangle de  $5 \times 11$  i un altre de  $12 \times 10$  de manera que tinguin el mínim nombre de quadrats possibles.
- Quina de les diferents possibilitats que heu fet té el mínim nombre de quadrats possibles?
- A quina conclusió heu arribat? 1r d'ESO Agafeu una tauleta o l'ordinador i visualitzeu aquest vídeo: <https://scratch.mit.edu/projects/258919973/> Proveu el que fa el ratpenat amb els rectangles que heu dibuixat abans. També podeu fer proves amb altres rectangles.
- Per què el ratpenat només dibuixa un tipus de descomposició si n'hi ha més d'una? Intenteu deduir les condicions que li han posat al ratpenat per descompondre els diferents rectangles.
- Podríem predir d'alguna manera la mesura del quadrat més petit segons la mesura dels costats del rectangle que introduïm? Justifiqueu el vostre raonament.
- Sabríeu predir, sense dibuixar els rectangles, quin és el costat del quadrat més gran en un rectangle amb costats molt grans? Per exemple, en un rectangle de costats 300 i 220?
- I el més petit?
- Què representa el quadrat petit respecte als números introduïts?

2n d'ESO: GIRANT EL DAU

Llançem dos daus cúbics a l'atzar. Un cop llançats, en tombem primer un i després l'altre, girant en cada cas sobre una de les seves arestes; amb això ens acaben d'aparèixer dos nombres a la cara superior (els anomenarem nombres-puntuació). Finalment sumem els valors d'aquests dos nombres-puntuació, i obtindrem un resultat que anomenarem resultat-suma.

Per exemple, llançem els daus i ens surten inicialment els números 2 i 4. El primer dau, en què ha sortit un 2, el tombem cap a un costat i aconseguim el nombre-puntuació 6 sobre el dau. El segon dau, que tenia inicialment un 4, el tombem i obtenim el nombre-puntuació 2 al damunt. Finalment ens quedem amb el resultat-suma final que és  $6+2=8$ .

Atenent a aquestes regles, responeu les següents situacions:

a) Explorem una mica aquest joc. Per exemple: Quins resultats-suma dels dos daus podem obtenir si inicialment han sortit els nombres 1 i 3? I si han sortit inicialment el 3 i el 6? I si han sortit inicialment dos quatres?

b) L'Oriol va estar fent proves i assegura que amb un nombre inicial 1 i un altre número inicial que no recorda va aconseguir tots els resultats-suma menys el 12. La Ivet li contesta que no pot ser, que a ella sempre li ha faltat el 12 i també li ha faltat un altre número. Vosaltres qui creieu que té raó? Justifiqueu clarament la vostra resposta.

c) Quina combinació inicial de nombres hauria de sortir per poder aconseguir tots els resultats-suma del 2 al 12? N'hi ha més d'una? És possible que hagueu respost buscant totes les possibles combinacions de nombres inicials i totes les seves possibilitats de resultats-suma; però... sense haver-ho fet, creieu que ja podíeu haver eliminat de la vostra resposta alguna combinació inicial? Expliqueu-ho clarament.

d) Si han sortit inicialment els nombres 1 i 2, i girem els daus a l'atzar, quin és el resultat-suma més probable? I si han sortit inicialment l'1 i el 3? I el 2 i el 3? Expliqueu-ho clarament en cada cas.

Ara modificarem les regles per convertir-ho en un joc per a dos jugadors.

Jugaran dos jugadors: l'Oriol i la Ivet. L'Oriol col·loca el dau sobre la taula, mostrant la puntuació de l'1 al 6 que ell ha desitjat. A continuació la Ivet gira el dau al voltant d'una aresta, la que ella desitgi, amb la qual cosa acaba de mostrar una puntuació a la cara superior. Aquestes dues puntuacions, la de l'Oriol i la de la Ivet, se sumen obtenint un resultat-suma.

El joc prossegueix amb l'Oriol girant el dau al voltant d'una aresta, a partir de la posició de la Ivet; la nova puntuació que queda a la cara superior es suma a l'anterior resultat-suma, i se n'obté un de nou. I així successivament: Oriol - Ivet - Oriol - Ivet - ...

El joc s'acaba quan un dels dos fa una jugada que dona un resultat-suma superior a 9 (no igual a 9). Aquest és el jugador que perd.

e) Podríeu trobar una estratègia de manera que la Ivet sempre guanyés? I si l'objectiu del joc és que es perd quan se supera el 18? Podríeu generalitzar la vostra estratègia per a altres objectius? En quines condicions? Expliqueu clarament les vostres respostes.

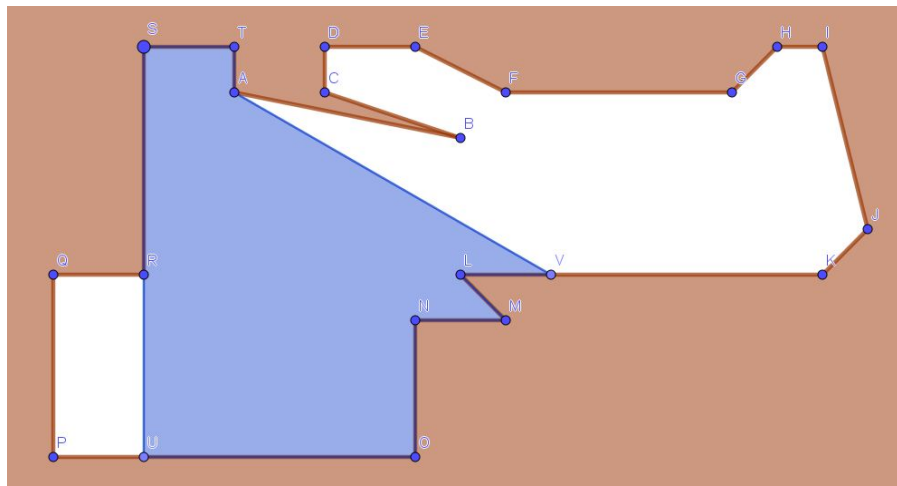
## Problema categoria 3r i 4t d'ESO

### Problema del +MATES-2019

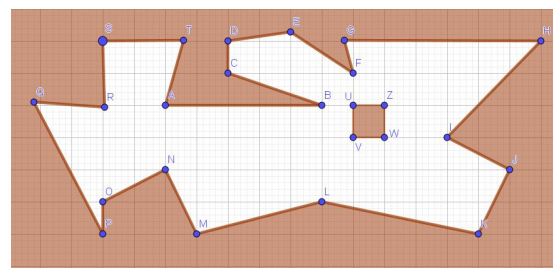
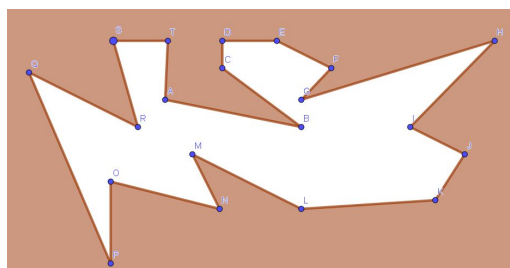
El cap d'estudis del centre es queixa sempre que no hi ha mai prous professors disponibles per vigilar el pati durant l'hora d'esbarjo. Des de l'administració li comenten que ha d'aprendre a optimitzar recursos i posar en vigilància únicament el nombre de professors estrictament necessari.

- Els professors vigilants no es poden moure del seu lloc. Però considerem que un professor en un punt A, podrà vigilar amb un angle de  $360^\circ$ .
- Entre tots els professors de guàrdia cal vigilar tot el pati. No es pot quedar cap racó sense vigilar.

Per exemple, un professor vigilant des del punt S controlaria tota la zona pintada en blau.



- Trobeu el nombre mínim de professors vigilants que es necessiten per aquest pati. Indiqueu els punts clau on posaries els professors. Explica perquè creus que aquest valor és el mínim.
- Dibuixeu l'esquema del vostre pati i analitzeu quants professors com a mínim poden vigilar les hores d'esbarjo.
- Trobeu el nombre de professors vigilants que es necessiten per aquests dos patis.

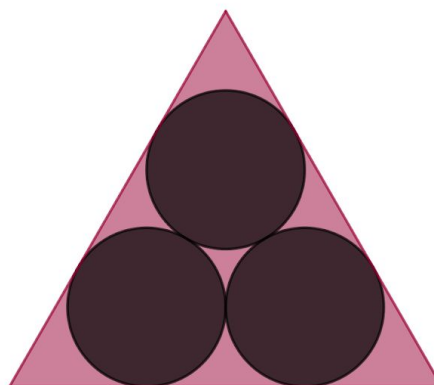
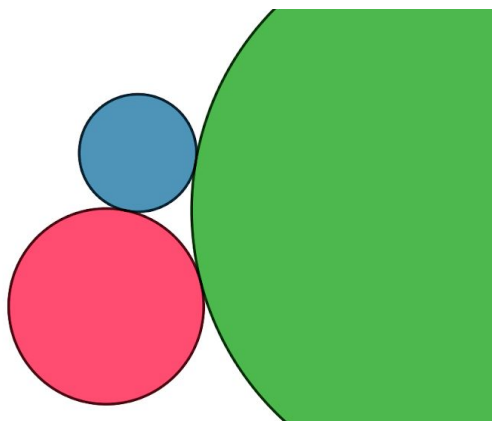


- d) Busqueu diferents exemples de patis en què el pati pugui ser vigilat per 1, 2, 3, 4 o 5 professors. Podeu trobar alguna regla que generalitzi els resultats trobats?
- e) Vistos els resultats trobats i lluny del que el cap d'estudis s'esperava, aquest decideix que a partir d'ara cada zona del pati serà controlada per dos professors. Quants professors necessita ara per cobrir tot el pati? (torneu a respondre sota aquest supòsit els apartats a, b i c anteriors).
- f) A part, el cap d'estudis decideix implicar-se en la vigilància de pati i per això crearà una ruta dins el pati des de la que espera poder controlar-ho tot. Podeu trobar una ruta mínima (de recorregut mínim) des de la que es controli tot el pati?

## Problema categoria Batxillerat

### Problema del +MATES-2019

- a) A partir d'un triangle qualsevol, dibuixa amb el GeoGebra tres circumferències tangents entre elles. Aquestes circumferències han de tenir els seus centres respectius als vèrtexs del triangle. Quin procés has usat per dibuixar-les? Hi ha alguna relació entre els radis de les tres circumferències?
- b) Volem encaixar 3 circumferències en un triangle equilàter. Tangents entre elles i als costats del triangle. Com ho construeixes? Quina relació hi ha entre el costat del triangle i el radi de les circumferències? Què passa si el triangle no és equilàter?



- c) Entrem ara en el 3D i volem encabir una esfera dins un tetraedre, l'esfera ha de ser tangent a totes les cares del tetraedre. Quina relació hi ha entre el volum de l'esfera i el del tetraedre?
- d) Anem complicant la construcció. Aprofitant les cantonades del tetraedre, volem afegir 4 boles més tangents a tres cares del tetraedre i a l'esfera. Quina és la relació dels radis de les boles amb el de l'esfera?

- e) Ho pots complicar-ho encara més i afegir 16 boles, 4 tangents a 3 costats i a una bola, i les altres 12 tangents a una bola, a l'esfera i a dues cares, omplint encara més l'espai que sobra?