

QUADERN D'ESTIU DE MATEMÀTIQUES Curs 2018-19

REPÀS DE L'ESO

Aquest és un llistat d'exercicis amb solucions, agrupats per temes. La teoria corresponent la trobaràs als llibres de 3r d'ESO i de 4t d'ESO.

No facis els exercicis per ordre, alterna'ls. Si no saps com fer-ne un, repassa la teoria del llibre i consulta els problemes similars fets a classe. Pren-t'ho com un repte, però si no et surt no et preocupis i fes-ne un altre. Si la majoria dels exercicis d'un tema no et surten vol dir que has detectat un problema d'aprenentatge al qual cal que posis solució.

No cal que facis tots els exercicis, no és un càstig. És una ajuda perquè l'inici del Batxillerat després d'unes llargues vacances no sigui traumàtic; tots els temes que es tracten són bàsics i és precís dominar-los abans d'iniciar l'estudi de nous.

Si no penses fer Batxillerat no cal que facis exercicis dels temes d'ampliació: Polinomis i trigonometria.

Els que feu els deures d'estiu entregueu-los al començament de curs al professor que tingueu i es tindrà en compte per la nota del primer trimestre. Ningú t'exigirà haver fet aquests exercicis, però al tractar-se, la majoria, de temes bàsics, t'aniran molt bé per repassar.

Per últim, aprèn a divertir-te fent matemàtiques.

Bones vacances i bons estudis!

1. ELS NOMBRES

1.1. a) $-3 + 9[4 - 7(8 - (-7))]$ = b) $(3 - 7)6 - 2(-1 + 3)$ = **S:** -912, -28

1.2. $5[6 - 3(4 - 2 + 5 - 8) + 2 - 3(6 - 9)]$ = **S:** 100

1.3. a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{15}\right)$ = b) $\frac{-2\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{4}{3} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4}\right)}$ = **S:** $\frac{17}{27}, \frac{-69}{140}$

1.4. a) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}}$ = b) $7 - 2\frac{1}{4 - 3\frac{1}{2}}$ = **S:** $\frac{5}{12}, \frac{31}{5}$

1.5. a) $(-2)^3$ = b) $(-2)^{-3}$ = c) -3^2 = d) $(-3)^2$ = **S:** -8, $-\frac{1}{8}$, -9, 9

1.6. $(-3)^2(-2) - (-1)^5 + (-2)(-3)^3$ = **S:** 37

1.7. a) $6^{\frac{1}{4}}$ = b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ = c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ = **S:** $\sqrt[4]{6}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt[3]{3}$

1.8. a) $\frac{(a^2 \cdot a^3)^4}{(a^2)^3 \cdot a}$ = b) $\left[\frac{(a^2 \cdot a^{-3})^4}{a^2}\right]^5$ = c) $\frac{(a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}})^4}{(a^2)^{\frac{1}{5}}}$ = **S:** $a^{13}, \frac{1}{a^{30}}, \sqrt[3]{a^{26}}$

1.9. a) $\frac{(2^2)^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-5}}{2^{-3} \cdot (0,5)^2 \cdot (2^3)^2}$ = b) $\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot (5^3)^{-1} \cdot \frac{1}{5}}{(2^{-3} \cdot 5^3)^4}$ = **S:** $\frac{3\sqrt{2^2}}{2^{22}} \cdot \frac{2^{15}}{5^{14}}$

1.10. Treure factors fora del radical: $\sqrt{216}, \sqrt{54}, \sqrt{300}, \sqrt{4032}, \sqrt[3]{5400}$ **S:** $6\sqrt{6}, 3\sqrt{6}, 10\sqrt{3}, 24\sqrt{7}, 6\sqrt[3]{25}$

1.11. a) $\sqrt{45} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$ = b) $2\sqrt{32} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{200} + \sqrt{242}$ = **S:** $7\sqrt{5}, -19\sqrt{2}$

1.12. a) $(\sqrt{6} - \sqrt{8})(1 - \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{3})^2 =$ b) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (6 - 4\sqrt{10}) =$ **S:** $\sqrt{6} - 2\sqrt{2}, -6$

1.13. a) $\sqrt{2^5 \sqrt{2}} =$ b) $\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} =$ c) $\sqrt[10]{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^5}} =$ **S:** $\sqrt[5]{2^3}, x^6 \sqrt{x}, \sqrt[15]{a^7}$

1.14. Expressa en potència de 10: $\frac{0,001^2 \cdot \sqrt{100^3}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10 \cdot \sqrt{10^{-2}}}{10^4}} =$ **S:** $10^{-25/4}$

1.15. Racionalitza: $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt[3]{2}}, \frac{5}{3+\sqrt{7}}, \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$ **S:** $\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \frac{5(3-\sqrt{7})}{2}, -4(\sqrt{3}+\sqrt{4})$

2. L'ÀLGEBRA

2.1. EQUACIONS DE 1r GRAU

2.1.1. $3(x-2) - 4(x+5) = 10(x+4)$ **S:** $x = -6$

2.1.2. $9(2x+3) - 4(3x-1) = x+41$ **S:** $x = 2$

2.1.3. $x+1 - \frac{3x}{2} = 2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ **S:** No en té (Incompatible)

2.1.4. $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{x-2}{12}$ **S:** $x = 5/4$

2.1.5. $\frac{4x-1}{3} = \frac{x}{6} + \frac{3x-1}{4}$ **S:** $x = 1/5$

2.1.6. $2(x-5)+7 = \frac{4x+1}{2}$ **S:** No en té (Incompatible)

2.1.7. $\frac{x-2}{5} = \frac{x+3}{10} + 7 - x$ **S:** $x = 7$

2.1.8. $\frac{3(x-2)}{2} - 3\left(x - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ **S:** $x = -5/14$

2.1.9. $2x - (3+4x) = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)$ **S:** $x = 0$

2.1.10. $\frac{3x+4}{3} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{13}{12}$ **S:** Tots els números reals (Indeterminada)

2.1.11. $\frac{5(x-2)}{3} - \frac{7(x-3)}{2} = 5 + \frac{x-1}{2} - (x+4)$ **S:** $x = 5$

2.2. . INEQUACIONS DE 1r GRAU

2.2.1. $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{2} \geq x - \left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{x}{10}$ **S:** $x \geq 10$

2.2.2. $\left(\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right)2 < \left(\frac{2}{5} - x\right)3$ **S:** $x < -0,075$

2.2.3. $\frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \geq \left(4 - \frac{1}{5}x\right)\frac{2}{3}$ **S:** $x \geq 193/44$

2.3. SISTEMES D'EQUACIONS DE 1r GRAU

2.3.1. a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \\ 2y - x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2y-3} = 9 \\ \frac{x+3}{y} = 6 \end{cases}$ **S:** $\begin{cases} a) x=0 y=1 \\ b) x=3 y=1 \\ c) x=9 y=2 \end{cases}$

2.3.2. a) $\begin{cases} 4x-6y=30 \\ 3y-2x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x=y-2 \\ 2(x-1)=-y+x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{cases}$ S: $\begin{cases} \text{a) Incompatible} \\ \text{b) Indeterminat} \\ \text{c) } x=5 \ y=3 \end{cases}$

2.4. EQUACIONS DE 2n GRAU

2.4.1. a) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$ b) $\frac{5(x-1)}{x+1} = \frac{2x+1}{x-1}$ S: $\begin{cases} \text{a) } x_1 = -\frac{2}{3} \ x_2 = \frac{1}{2} \\ \text{b) } x_1 = \frac{1}{3} \ x_2 = 4 \end{cases}$

2.4.2. a) $(x+6)(x-6) - 8 = 1 - 4x$ b) $x(x+3) = 2x$ S: $\begin{cases} \text{a) } x_1 = -9 \ x_2 = 5 \\ \text{b) } x_1 = -1 \ x_2 = 0 \end{cases}$

2.4.3. a) $x + \frac{1}{x+1} = 1$ b) $4x^2 - 24 = 3x^2 + 601$ S: $\begin{cases} \text{a) } x = 0 \\ \text{b) } x_1 = -25 \ x_2 = 25 \end{cases}$

2.4.4. a) $24x^2 - 7x = 3x\left(5x - \frac{x}{2}\right)$ b) $\frac{1}{x} = \frac{1-x}{x+\frac{1}{3}}$ S: $\begin{cases} \text{a) } x_1 = 0 \ x_2 = \frac{2}{3} \\ \text{b) } x = \frac{1}{3} \end{cases}$

2.5. POLINOMIS

2.5.1. $(2x^4 + 5x^3 - x^2 + 4x + 4) \div (x^2 + 2x - 3)$ S: $Q(x) = 2x^2 + x + 3$ $R(x) = x + 13$

2.5.2. $(2x^5 - x^3 + 3x^2 + x - 1) \div (x^3 - x^2 - 1)$ S: $Q(x) = 2x^2 + 2x + 1$ $R(x) = 6x^2 + 3x$

2.5.3. $(x^3 - x^2 + 7) \div (2x - 1)$ S: $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$ $R = \frac{55}{8}$

2.5.4. Utilitzant el teorema del residu, sense fer la divisió, digues si els següents polinomis són divisibles per $x+1$: a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$

2.5.5. Calcula m perquè:

- a) el polinomi $x^3 - 7x^2 + 2x - m$ sigui divisible per $x-1$ S: $m = -4$
b) el residu de la divisió $(x^4 - 3mx^3 + 2x - m) \div (x-2)$ sigui -5 S: $m = 1$

2.5.6. Factoritza: a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$ b) $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$ c) $x^3 - 6x^2 - x + 6$
S: a) $(x-2)(x-3)(x+4)$ b) $2(x-1)(x+2)(x+3)$ c) $(x-1)(x+1)(x-6)$

2.5.7. Troba un polinomi de tercer grau que tingui per solucions 1, -2, 3 i que el valor numèric per $x=0$ sigui 12. S: $2(x-1)(x+2)(x-3)$

2.5.8. Resol: a) $x^4 + x^3 - 16x^2 + 20x = 0$ b) $6x^5 + 7x^4 - 47x^3 - 85x^2 - 7x + 30 = 0$
S: a) $x_1 = -5 \ x_2 = 0 \ x_3 = 2$ b) $x_1 = -2 \ x_2 = -5/3 \ x_3 = -1 \ x_4 = 1/2 \ x_5 = 3$

2.6. FRACCIONS ALGÈBRIQUES

Factoritza 1r els denominadors per trobar el mcm

2.6.1. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} =$ S: $\frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^3 - x}$

2.6.2. $\frac{2}{x-1} - \frac{3-x}{x^2-2x+1} - \frac{2x^2}{x^2-1} =$ S: $\frac{-2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2(x+1)}$

2.6.3. $\frac{2+3x}{x+2} - \frac{x-3}{x^2-4} - \frac{1-x^2}{3x-6} =$ S: $\frac{x^3 + 11x^2 - 16x - 5}{3(x+2)(x-2)}$

$$2.6.4. \quad a) \quad x^2 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} = \quad b) \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x - \frac{1}{\frac{x-1}{x} + 1}} = \quad \text{S: a) } -x \quad b) \quad \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1}$$

2.7. PROBLEMES D'APLICACIÓ

- 2.7.1. Quatre gelats grans i 6 de mida petita ens costen 8,6 €, però si comprem 6 gelats grans i 4 petits ens costen 9,4 €. Quin és el preu dels gelats? **S:** 0,70 € i 1,10 €
- 2.7.2. En un test de 100 qüestions de cultura general, per cada qüestió ben contestada es donen 7 punts, i per cada qüestió no contestada o incorrecta ens en treuen 10. Una persona hi va aconseguir un total de 88 punts. ¿Quantes qüestions va contestar correctament? **S:** 64 qüestions
- 2.7.3. La suma de la meitat i la setena part d'un número és deu unitats inferior al número. De quin número es tracta? **S:** 28
- 2.7.4. La suma de dos números és 54 i el seu producte 713. Quins són? **S:** 23 i 31
- 2.7.5. La suma dels quadrats de dos números consecutius és 545. Quins són? Hi ha més d'una solució? **S:** 16 i 17 o -16 i -17
- 2.7.6. Em falten 0,10 € per comprar-me una llibreta petita. Si costés dues cinques parts del que val, la podria comprar i encara em sobrarien 0,20 €. Quin és el preu de la llibreta? **S:** 0,40 €
- 2.7.7. Amb 80 € hem comprat un cert nombre de llibres d'igual preu. Si cada llibre costés 1 € més car hauríem comprat 4 llibres menys. Quant costa cada llibre i quants hem comprat? **S:** 20 llibres de 4 €
- 2.7.8. Quines dimensions ha de tenir un rectangle per a que el perímetre sigui 34 m i la superfície 72 **S:** 9 m i 8 m
- 2.7.9. Troba una fracció tal que si se suma una unitat al seu numerador equival a 1/3, i, en canvi, si la unitat se suma al denominador equival a 1/4. **S:** 4/15
- 2.7.10. La diferència entre les superfícies de dos quadrats és de 39 cm², i la diferència dels seus costats, 3 cm. Calcula el costat i l'àrea de cada quadrat. **S:** 8 i 5 cm de costat
- 2.7.11. Els diàmetres de les antigues monedes de 25 € i 5 € eren respectivament 26,5 mm i 23 mm. Alineant monedes d'ambdós tipus s'aconsegueix una longitud de 1,405 m, amb un valor de 1075 € Quantes monedes hi haurà de cada tipus? **S:** 40 de 25 € i 15 de 5
- 2.7.12. Un pare té actualment 5 vegades l'edat de la seva filla. D'aquí a tres anys l'edat del pare serà 4 vegades la de la filla. Quines són les edats actuals? **S:** 45 i 9 anys
- 2.7.13. Fa 19 anys l'edat d'una persona era el doble de la d'una altra. Dintre d'onze anys l'edat de la segona serà 7/9 la de la primera. Quines edats tenen? **S:** 31 i 43 anys

3. FUNCIONS

3.1. LA RECTA

- 3.1.1. Escribe les equacions de les següents rectes i representa-les gràficament:
 a) pendent 2 i ordenada a l'origen 4
 b) pendent -1 i ordenada a l'origen 3
 c) pendent 2/5 i ordenada a l'origen -2
- 3.1.2. Escribe la fórmula de quatre funcions que tinguin per gràfiques rectes que passin pel punt (3,-1). Dibuixa-les sobre uns mateixos eixos.
- 3.1.3. Escribe l'equació i dibuixa la recta que passa pels punts (1,1) i (4,-2). **S:** $y = -x + 2$
- 3.1.4. Troba l'equació de la recta que passa pel punt (-1,6) i té pendent -1/2. Representa-la. **S:**
 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$
- 3.1.5. Troba l'equació de la recta que passa per (2,2) i és paral·lela a la recta que passa pels punts (-3,-1) i (3,12). Representa-la. **S:** $y = \frac{13}{6}x - \frac{7}{3}$
- 3.1.6. Quina és l'equació de la recta que passa pels punts (1,-1) i (-2,3)? Utilitza-la per trobar 5 punts alineats amb aquests dos. Fes el gràfic. **S:** $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
- 3.1.7. Dibuixa el gràfic de les rectes: $y = -3$, $y = 2$, $y = 0$. Quin és el pendent d'aquestes rectes?

3.2. L'EXPONENCIAL

3.2.1. Dibuixa en un mateix sistema de referència els gràfics de les funcions: a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.2.2. Dibuixa: a) $y = 3 \cdot 2^x$ b) $y = 2^x + 3$

4. GEOMETRIA

- 4.1. Sobre un mapa d'escala 1:500 el perímetre d'un terreny és de 28'5 cm i la seva superfície de 40 cm². Calcula el perímetre i la superfície reals. **S:** 142'5m i 1000 m²
- 4.2. L'àrea d'una circumferència val aproximadament 12'566 cm². Calcula la seva longitud. **S:** 12'566 cm.
- 4.3. Troba el costat d'un quadrat del qual sabem que si augmentem en 3 cm cada costat, l'àrea augmenta en 57 cm². **S:** 8 cm
- 4.4. Calcula la longitud d'una circumferència circumscrita a un rectangle de costats 6 i 13 cm. **S:** 44'98 cm
- 4.5. Calcula el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 7 i 10 cm i 34 cm² de superfície. **S:** 25'54 cm
- 4.6. Calcula la superfície d'un icosaèdre regular d'aresta 20 cm. **S:** 34'641 dm²
- 4.7. Un cub metàl·lic pesa 700 g, i amb un torn eliminem el metall que cal per tal d'obtenir un cilindre inscrit. Calcula quant pesa aquest cilindre. **S:** 366'52 g
S: 552'92 cm²
- 4.8. Calcula el volum i la superfície de la piràmide recta de base quadrada inscrita en un cilindre de volum 75 cm³ i radi 5 cm. **S:** $V = 50 \text{ cm}^3$ i $S = 10\sqrt{43} + 50 \text{ cm}^2$
- 4.9. Calcula el volum d'un tetràedre regular d'aresta 50 cm. **S:** $V = \frac{31250\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

5. TRIGONOMETRIA

- 5.1. Els costats iguals d'un triangle isòsceles valen 48 cm, i l'angle que formen 37°12'43". Troba el costat que falta i els altres angles. **S:** 30'6 cm i 71°23'38"
- 5.2. Calcula el complementari i el suplementari de $\frac{\pi}{6}$ rad i de $\frac{2\pi}{5}$ rad en radians i en graus sexagesimals. **S:** $\pi/3, 5\pi/6, \pi/10, 3\pi/560^\circ, 150^\circ, 18^\circ, 108^\circ$
- 5.3. Sabent que $\text{tg } x = -4/3$, indica a quins quadrants pot estar x. Per a cada un d'ells, calcula el sinus i el cosinus. **S:** Per x del 2n quadrant, $\sin x = 4/5$ i $\cos x = -3/5$ i per x del 4t quadrant, $\sin x = -4/5$ i $\cos x = 3/5$.
- 5.4. El costat d'un pentàgon regular és 6'8 cm. Troba la superfície del pentàgon. **S:** 79'55 cm².
- 5.5. Des del cim d'una muntanya es veuen dos pobles alineats, el més proper amb un angle de depressió de 6°, i el més allunyat amb un angle de depressió de 5°. Si la distància entre els dos pobles és de 5 km, troba l'alçada de la muntanya. **S:** 2.610 m
- 5.6. Resol el triangle rectangle de catets 18 m, i 35 m.
- 5.7. Calcula la superfície d'un octògon regular de 5 cm de costat.

6. ESTADÍSTICA I PROBABILITAT

- 6.1. En una enquesta feta sobre el nombre de membres de què consta la seva família hem obtingut els següents resultats:

Nombre de membres	Freqüència						
0	1						
1	2						
2	7						
3	4						
4	2						

Calcula els paràmetres estadístics. Utilitza la calculadora.

- 6.2. En una urna hi ha 5 boles numerades del 1 al 5. S'agafen dues boles sense reposició.
- Escriu l'espai mostral
 - Escriu l'esdeveniment A = la primera bola és parell
 - Escriu l'esdeveniment B = la primera bola és 4
 - Escriu l'esdeveniment C = la segona bola és 3
 - Calcula la probabilitat de A , B , C i de $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cap C$
- 6.3. Siguin dos esdeveniments tals que $P(A)=0,4$, $P(B)=0,5$ i $P(A \cap B)=0,3$. Calcula la probabilitat de la unió. Calcula la probabilitat de \bar{A} i \bar{B}
- 6.4. La probabilitat d'un jugador d'encertar gol des de el punt de penalty és 0,5. Si pot fer 3 llançaments calcula la probabilitat d'encertar algun i la probabilitat de fallar els tres tirs.
- 6.5. En una urna hi ha 6 boles blanques i 3 negres. S'agafen 2 boles a l'atzar amb reposició calculeu la probabilitat de :
- Les dues boles siguin del mateix color
 - La primera bola sigui blanca i la segona negra
- 6.6. En una urna hi ha 5 boles numerades del 1 al 5. S'agafen dues boles amb reposició.
- Escriu l'espai mostral
 - Escriu l'esdeveniment A = la primera bola és parell
 - Escriu l'esdeveniment B = la primera bola és 4
 - Escriu l'esdeveniment C = la segona bola és 3
 - Calcula la probabilitat de A , B , C i de $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cap C$